

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia

- a) de centro el punto  $(3, -1)$  y radio 5. *Sol.*  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ .
- b) de centro el punto  $(0, 5)$  y radio 5. *Sol.*  $x^2 + y^2 - 10y = 0$ .
- c) de centro el punto  $(-4, 2)$  y diámetro 8. *Sol.*  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ .
- d) de centro el punto  $(4, -1)$  y que pase por  $(-1, 3)$ .  
*Sol.*  $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 24 = 0$ .
- e) de diámetro el segmento que une los puntos  $(-3, 5)$  y  $(7, -3)$ .  
*Sol.*  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$ .
- f) de centro el punto  $(-4, 3)$  y que sea tangente al eje  $y$ .  
*Sol.*  $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$ .
- g) de centro el punto  $(3, -4)$  y que pase por el origen.  
*Sol.*  $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ .
- h) de centro el origen y que pase por el punto  $(6, 0)$ .  
*Sol.*  $x^2 + y^2 - 36 = 0$ .
- i) que sea tangente a los dos ejes de coordenadas de radio  $r = 8$  y cuyo centro esté en el primer cuadrante. *Sol.*  $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$ .
- j) que pase por el origen, de radio  $r = 10$  y cuya abscisa de su centro sea  $-6$ .  
*Sol.*  $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 12x + 16y = 0$ .

2. Hallar el centro y el radio de las circunferencias siguientes. Determinar si cada una de ellas es real, imaginaria o se reduce a un punto. Aplicar la fórmula y comprobarla por suma y resta de los términos adecuados para completar cuadrados.

- a)  $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$ . *Sol.*  $(4, -5)$ ,  $r = \sqrt{53}$ , real.
- b)  $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$ . *Sol.*  $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ ,  $r = \frac{1}{3}\sqrt{-13}$ , imaginaria.
- c)  $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$ . *Sol.*  $(4, \frac{7}{2})$ ,  $r = \frac{1}{2}\sqrt{113}$ , real.
- d)  $x^2 + y^2 = 0$ . *Sol.*  $(0, 0)$ ,  $r = 0$ , un punto.
- e)  $2x^2 + 2y^2 - x = 0$ . *Sol.*  $(\frac{1}{4}, 0)$ ,  $r = \frac{1}{4}$ , real.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos

- a)  $(4, 5)$ ,  $(3, -2)$ , y  $(1, -4)$ . *Sol.*  $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0$ .
- b)  $(8, -2)$ ,  $(6, 2)$ , y  $(3, -7)$ . *Sol.*  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ .
- c)  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ , y  $(9, 2)$ . *Sol.*  $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$ .
- d)  $(-4, -3)$ ,  $(-1, -7)$ , y  $(0, 0)$ . *Sol.*  $x^2 + y^2 + x + 7y = 0$ .
- e)  $(1, 2)$ ,  $(3, 1)$ , y  $(-3, -1)$ . *Sol.*  $x^2 + y^2 - x + 3y - 10 = 0$ .

4. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados

- a)  $x - y + 2 = 0$ ,  $2x + 3y - 1 = 0$ , y  $4x + y - 17 = 0$ .  
*Sol.*  $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$ .
- b)  $x + 2y - 5 = 0$ ,  $2x + y - 7 = 0$ , y  $x - y + 1 = 0$ .  
*Sol.*  $3x^2 + 3y^2 - 13x - 11y + 20 = 0$ .

c)  $3x + 2y - 13 = 0, x + 2y - 3 = 0, yx + y - 5 = 0.$

Sol.  $x^2 + y^2 - 17x - 7y + 52 = 0.$

d)  $2x + y - 8 = 0, x - y - 1 = 0, yx - 7y - 19 = 0.$

Sol.  $3x^2 + 3y^2 - 8x + 8y - 31 = 0.$

e)  $2x - y + 7 = 0, 3x + 5y - 9 = 0, yx - 7y - 13 = 0.$

Sol.  $169x^2 + 169y^2 - 8x + 498y - 3707 = 0.$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de lados

a)  $4x - 3y - 65 = 0, 7x - 24y + 55 = 0, y 3x + 4y - 5 = 0.$

Sol.  $x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0.$

b)  $7x + 6y - 11 = 0, 9x - 2y + 7 = 0, y 6x - 7y - 16 = 0.$

Sol.  $85x^2 + 85y^2 - 60x + 70y - 96 = 0.$

c)  $y = 0, 3x - 4y = 0, y 4x + 3y - 50 = 0.$

Sol.  $4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0.$

d)  $15x - 8y + 25 = 0, 3x - 4y - 10 = 0, y 5x + 12y - 30 = 0.$

Sol.  $784x^2 + 784y^2 - 896x - 392y - 2399 = 0.$

e) inscrita al triángulo de vértices  $(-1, 3), (3, 6)$  y  $\left(\frac{31}{5}, 0\right).$

Sol.  $7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 = 0.$

6. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro  $(-2, 3)$  que sea tangente a la recta  $20x - 21y - 42 = 0.$  Sol.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0.$

7. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el origen que sea tangente a la recta  $8x - 15y - 12 = 0.$  Sol.  $289x^2 + 289y^2 = 144.$

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro  $(-1, -3)$  que sea tangente a la recta que une los puntos  $(-2, 4)$  y  $(2, 1).$  Sol.  $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0.$

9. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esté en el eje  $x$  y que pase por los puntos  $(-2, 3)$  y  $(4, 5).$  Sol.  $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0.$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $(1, -4)$  y  $(5, 2)$  y que tiene su centro en la recta  $x - 2y + 9 = 0.$  Sol.  $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 47 = 0.$

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $(-3, 2)$  y  $(4, 1)$  y sea tangente al eje  $x.$  Sol.  $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0, x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0.$

12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $(2, 3)$  y  $(3, 6)$  y sea tangente a la recta  $2x + y - 2 = 0.$  Sol.  $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0, x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0.$

13. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto  $(11, 2)$  y sea tangente a la recta  $2x + 3y - 18 = 0$  en el punto  $(3, 4).$  Sol.  $5x^2 + 5y^2 - 98x - 142y + 737 = 0.$

14. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la recta  $3x - 4y - 13 = 0$  en el punto  $(7, 2).$

Sol.  $x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0, x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0.$

15. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas  $x - 2y + 4 = 0$  y  $2x - y - 8 = 0$  y que pase por el punto  $(4, -1).$

Sol.  $x^2 + y^2 - 30x + 6y + 109 = 0, x^2 + y^2 - 70x + 46y + 309 = 0.$

16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas  $x - 3y + 9 = 0$  y  $3x + y - 3 = 0$  y que tenga su centro en la recta  $7x + 12y - 32 = 0.$

Sol.  $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 31 = 0, 961x^2 + 961y^2 + 248x - 5270y + 7201 = 0.$



17. Hallar la ecuación de la circunferencia definida por el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos  $(-4, 1)$  y  $(3, 2)$ .  
 Sol.  $x^2 + y^2 + x - 3y - 10 = 0$ .
18. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas  $4x + 3y - 50 = 0$  y  $3x - 4y - 25 = 0$  y cuyo radio sea igual a 5. Sol.  $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 36x - 2y + 300 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ .
19. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares  $2x + 3y - 6 = 0$  y  $3x - 2y + 8 = 0$  sea igual a 10. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.  
 Sol.  $13x^2 + 13y^2 + 24x - 68y - 30 = 0$ . Centro  $\left(-\frac{12}{13}, \frac{34}{13}\right)$ ,  $r = \sqrt{10}$ .
20. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  y  $b_1x - a_1y + c_2 = 0$  es una constante  $K^2$ , es una circunferencia.
21. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos  $(-2, -5)$  y  $(3, 4)$  sea igual a 70. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.  
 Sol.  $x^2 + y^2 - x + y - 8 = 0$ . Centro  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $r = \frac{1}{2}\sqrt{34}$ .
22. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos  $(2, -1)$  y  $(-3, 4)$  sea igual a  $2/3$ . Si es una circunferencia, determinar su centro y su radio.  
 Sol.  $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$ . Centro  $(6, -5)$ ,  $r = 6\sqrt{2}$ .
23. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  es igual a  $K$  (constante) es una circunferencia.
24. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyo cuadrado de la distancia al punto fijo  $(-2, -5)$  sea el triple de la correspondiente a la recta  $8x + 15y - 34 = 0$ .  
 Sol.  $17x^2 + 17y^2 + 44x + 125y + 595 = 0$ ,  $17x^2 + 17y^2 + 92x + 215y + 391 = 0$ .
25. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta  $3x - 4y + 17 = 0$  que sea concéntrica con la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$ .  
 Sol.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ .
26. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$  en el punto  $(3, 4)$ .  
 Sol.  $x^2 + y^2 - 18x - 24y + 125 = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 75 = 0$ .
27. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de 30 centímetros de longitud cuyos extremos se apoyan constantemente en los ejes de coordenadas.  
 Sol. Una circunferencia,  $x^2 + y^2 = 225$ .
28. Hallar la máxima y mínima distancias del punto  $(10, 7)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ . Sol. 15 y 5.
29. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto  $(7, 8)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$ .  
 Sol.  $2\sqrt{26}$ .
30. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto  $(6, 4)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$ . Sol. 9.
31. Hallar el valor de  $K$  para el cual la longitud de la tangente trazada desde el punto  $(5, 4)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2Ky = 0$  sea igual a  $a)$ ,  $1, b)$ ,  $0$ . Sol.  $a) K = -5$ ,  $b) K = -5, 125$ .